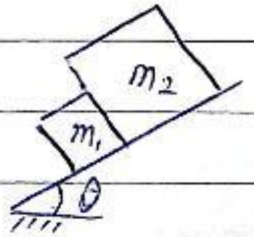
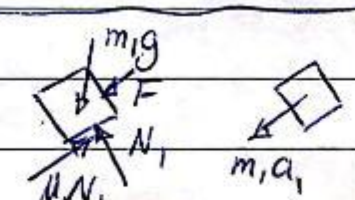
دو بلوک به جرم‌های m_1 و m_2 بر روی سطح شیب‌دار با زاویه θ

نسبت به افق قرار دارند. ضرایب اصطکاک بین بلوک‌ها و سطح به ترتیب

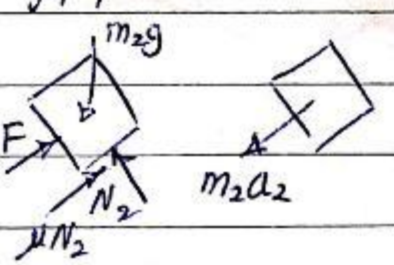
μ_1 و μ_2 می‌باشد. مطلوبست محاسبه نیروی F بین دو بلوک و

آستانه جدا شدن دو بلوک؟





$$\begin{cases} N_1 = m_1 g \cos\theta \\ m_1 g \sin\theta - \mu_1 m_1 g \cos\theta + F = m_1 a_1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} N_2 = m_2 g \cos\theta \\ m_2 g \sin\theta - \mu_2 m_2 g \cos\theta - F = m_2 a_2 \end{cases}$$

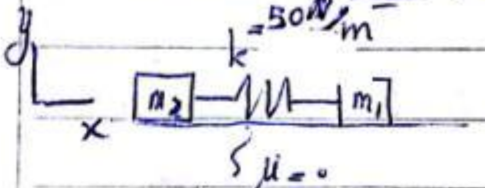
اگر دو بلوک در تماس با یکدیگر باشند، $a_1 = a_2$ لذا

$$a_1 = a_2 \Rightarrow F = (\mu_1 - \mu_2)\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) g \cos\theta$$

با توجه به اینکه شرط جدایی دو بلوک $F \leq 0$ است، بنابراین:

$F \leq 0 \Rightarrow \boxed{\mu_2 \geq \mu_1}$ شرط جدایی

دو بلوک به جرم‌های m_1 و m_2 مطابق شکل روی سطح بدون اصطکاک از حالت سکون رها می‌شوند. مطلوبست تعیین سرعت حرکت از دو جرم وقتی فنر بدون فشردگی است؟ (فشردگی اولیه فنر $0{,}2\,m$)



با استفاده از قضیه کار و انرژی، انرژی پتانسیل فنر در حالت دوم برابر با صفر است، لذا:

$$\Delta T + \Delta V_g + \Delta V_S = U_{1\to 2}$$

($\Delta V_g = 0$ ، $U_{1\to2} = 0$)

$$T_1 = 0 \,, \quad T_2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

$$V_{S_1} = \frac{1}{2} k (0{,}2)^2 \,, \quad V_{S_2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 - \frac{1}{2} k (0{,}2)^2 = 0$$

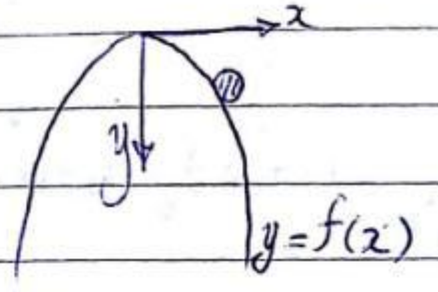
با توجه به اینکه در راستای x پایستاری مومنتوم خطی برقرار است، لذا:

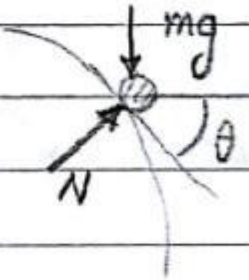
$$G_2 = G_1 = 0 \Rightarrow m_1 V_1 + m_2 V_2 = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{m_2}{m_1} V_2$$

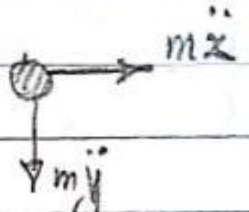
$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 V_2^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{1}{2} k (0{,}2)^2 = 1 \Rightarrow V_2^2 = \frac{2}{m_2\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}$$

ذره‌ای از حال سکون بر روی سطح $y=f(x)$ رها می‌شود. مطلوبست تعیین

شرط جدایی ذره از روی سطح؟







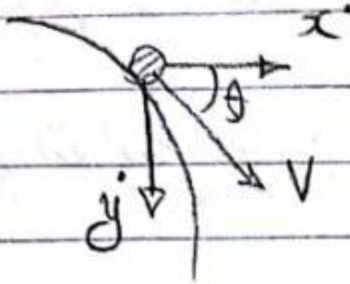
$$\begin{cases} N\sin\theta = m\ddot{x} \\ mg - N\cos\theta = m\ddot{y} \end{cases} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\ddot{x}}{g-\ddot{y}}$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \dot{x}f'(x) \quad , \quad \ddot{y} = \dot{x}^2 f''(x) + \ddot{x}f'(x)$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\ddot{x}}{g - \ddot{x}f' - \dot{x}^2 f''} \quad , \quad \tan\theta = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

با استفاده از قضیه کار و انرژی:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \Rightarrow v = \sqrt{2gy} = \sqrt{2gf(x)}$$



$$V\cos\theta = \dot{x}$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2 = V^2\cos^2\theta \quad , \quad \frac{1}{\cos^2\theta} = 1+\tan^2\theta = 1+f'(x)^2$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2 = \frac{2gf}{1+f'^2}$$

باجایگذاری $\dot{x}^2$ در رابطهٔ بدست آمده از قسمت ب داریم :

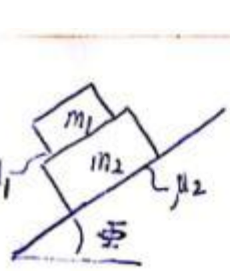
$$\tan\theta = f' = \frac{\ddot{x}}{g - \ddot{x}f' - \frac{2gf}{1+f'^2}f''}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{1 - \frac{2ff''}{1+f'^2}}{1+f'^2} f'g$$

شرط جدایی از سطح، $N=0$ است:

$$N=0 \Rightarrow \ddot{x} = 0 \Rightarrow \boxed{1 - \frac{2ff''}{1+f'^2} = 0}$$

جرم بلوک‌ها، ضرایب اصطکاک سطوح و زاویه سطح شیب‌دار در شکل مقابل نشان داده شده است. نشان دهید:

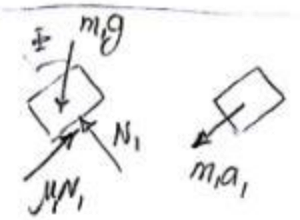


a) اگر $\mu_2 < \tan\Phi$ باشد، حرکت اتفاق می‌افتد.

b) اگر $\mu_2 \le \mu_1$ باشد، بلوک‌ها باهم حرکت می‌کنند.

c) اگر $\mu_2 > \mu_1$، بلوک ۱ بر روی بلوک ۲ می‌لغزد.

d) اگر $\tan\Phi \le \mu_2$ باشد، بلوک پایینی حرکت نمی‌کند.



$$\begin{cases} m_1 g\cos\Phi = N_1 \\ m_1 g\sin\Phi - \mu N_1 = m_1 a_1 \end{cases} \Rightarrow g(\sin\Phi - \mu_1\cos\Phi) = a_1$$

$$\begin{cases} N_2 = N_1 + m_2 g\cos\Phi = (m_1+m_2)g\cos\Phi \\ m_2 g\sin\Phi + \mu_1 N_1 - \mu_2 N_2 = m_2 a_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g\left[\sin\Phi + \mu_1\frac{m_1}{m_2}\cos\Phi - \mu_2\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\cos\Phi\right] = a_2$$

زمانی حرکت اتفاق می‌افتد که a_1 و a_2 مقدار داشته باشند. به عبارت دیگر این دو کمیت مقادیر مثبتی داشته باشند. لذا:

$$\begin{cases} a_1 > 0 \Rightarrow \sin\Phi - \mu_1\cos\Phi > 0 \Rightarrow \boxed{\tan\Phi > \mu_1} \quad (I) \\ a_2 > 0 \Rightarrow \sin\Phi + \mu_1\frac{m_1}{m_2}\cos\Phi - \mu_2\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\cos\Phi > 0 \Rightarrow 1 + \frac{\mu_1}{\tan\Phi}\frac{m_1}{m_2} - \frac{\mu_2}{\tan\Phi}\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) > 0 \end{cases}$$

با جایگذاری رابطه (I) خواهیم داشت:

$$\frac{\mu_1}{\tan\Phi} < 1 \Rightarrow 1 + \frac{\mu_1}{\tan\Phi}\frac{m_1}{m_2} < 1 + \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow 0 < 1 + \frac{\mu_1}{\tan\Phi}\frac{m_1}{m_2} - \frac{\mu_2}{\tan\Phi}\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) < \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\left(1-\frac{\mu_2}{\tan\Phi}\right)$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\mu_2}{\tan\Phi} > 0 \Rightarrow \boxed{\tan\Phi > \mu_2}$$

b) درصورتی دو بلوک باهم دیگر حرکت می کنند که شتاب جرم m_1 از شتاب جرم m_2 کمتر باشد، $(a_1 \leqslant a_2)$:

$$\begin{cases} g(\sin\Phi - \mu_1 \cos\Phi) = a_1 \leqslant a_2 \\ g\left[\sin\Phi + \mu_1 \frac{m_1}{m_2}\cos\Phi - \mu_2\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\cos\Phi\right] = a_2 \end{cases} \Rightarrow \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\cos\Phi\,(\mu_1 - \mu_2) \geqslant 0 \Rightarrow \boxed{\mu_1 \geqslant \mu_2}$$

---

c) درحالی جرم m_1 بروی جرم m_2 می لغزد که $a_1 > a_2$:

$$a_1 > a_2 \Rightarrow \mu_2 > \mu_1$$

جرم m_2 درصورتی حرکت نمی کند که $a_2 \leqslant 0$، لذا:

$$g\left[\sin\Phi + \mu_1 \frac{m_1}{m_2}\cos\Phi - \mu_2\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\cos\Phi\right] \leqslant 0 \Rightarrow \boxed{\tan\Phi \leqslant \mu_2 + (\mu_2 - \mu_1)\frac{m_1}{m_2}}$$

---

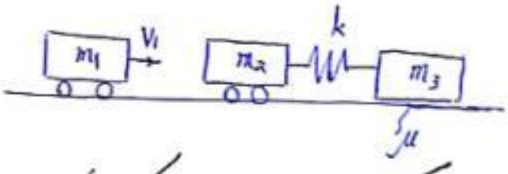
d) جرم m_2 درصورتی حرکت نمی کند که $a_2 \leqslant 0$ باشد، در اینصورت:

$$a_2 \leqslant 0 \Rightarrow \sin\Phi + \mu_1 \frac{m_1}{m_2}\cos\Phi - \mu_2\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\cos\Phi \leqslant 0$$

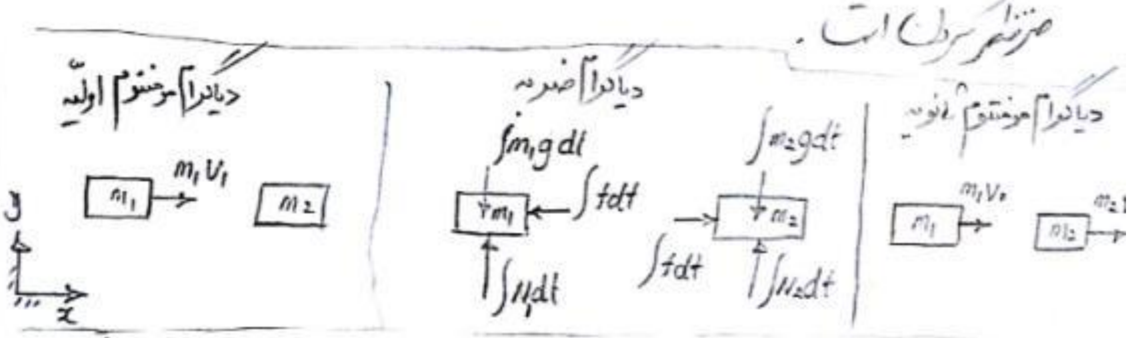
با توجه به اینکه ترم $\mu_1 \frac{m_1}{m_2}\cos\Phi$ همواره مثبت است، لذا:

$$\sin\Phi - \mu_2\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\cos\Phi \leqslant 0 \Rightarrow \boxed{\tan\Phi \leqslant \mu_2\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) \leqslant \mu_2}$$

واگن شماره (۱) به جرم m_1 با سرعت v_1 به واگن شماره (۲) به جرم m_2 برخورد می‌کند و به آن متصل می‌شود. ضریب اصطکاک بین واگن‌ها و سطح برابر با صفر است. بلوک m_3 روی سطح با اصطکاک μ_s قرار دارد. مطلوبست ماکزیمم سرعتی که جرم m_1 می‌تواند داشته باشد به شرطی که بلوک m_3 جابجا نشود؟



برای برخورد دو واگن، از رابطهٔ مومنتوم خطی استفاده می‌کنیم. باید در نظر داشت که در دیاگرام ضربه، ضربه نیروی ایجاد شده در فنر در مقابل با ضربهٔ به وجود آمده بین دو واگن قابل صرف‌نظر کردن است.



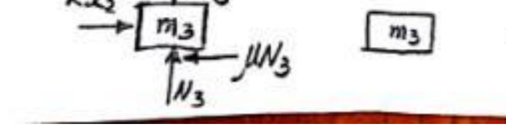
$$\int \Sigma F_x\,dt = (G_2)_x - (G_1)_x \quad , \quad (G_2)_x , (G_1)_x \triangleq m(V_2)_x , m(V_1)_x$$

$$m_1 \text{ جرم}: \; -\int f\,dt = m_1 V_0 - m_1 V_1$$

$$m_2 \text{ جرم}: \; \int f\,dt = m_2 V_0$$

$$\Rightarrow m_1 V_1 = (m_1 + m_2) V_0 \Rightarrow \boxed{V_0 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_1}$$

با رسم دیاگرام آزاد برای جسم m_3 به شرط آنکه جابجا نشود، خواهیم داشت:



$$\rightarrow \begin{cases} N_3 = m_3 g \\ \mu N_3 = k x_2 \Rightarrow (x_2)_{Max} = \dfrac{\mu_s m_3 g}{k} \end{cases}$$

آستانهٔ لغزش بلوک (3) موقعیتی است که نیروی فنر از اصطکاک ایستایی بین بلوک و سطح بیشتر باشد. همچنین بیشینه نیروی فنر در حالتی است که فنر ماکزیمم جابه‌جایی را تجربه کند. در حالت ماکزیمم جابه‌جایی فنر، سرعت جرم m_2 برابر با صفر است. لذا با نوشتن رابطهٔ کار و انرژی برای جرم m_2 خواهیم داشت:

$$\Delta T + \Delta V_S = 0$$

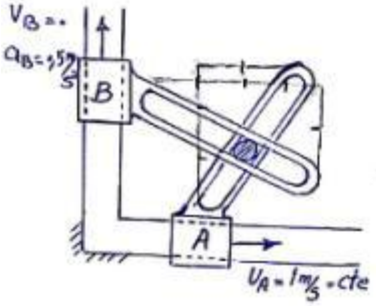
$$T_1 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)(V_0)^2_{Max} \quad , \quad T_2 = 0 \quad , \quad \Delta V_S = \frac{1}{2}k(x_2)^2_{Max}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(m_1+m_2)(V_0)^2_{Max} = \frac{1}{2}k(x_2)^2_{Max} = \frac{1}{2}k\left(\frac{\mu_s m_3 g}{k}\right)^2 \Rightarrow (V_0)_{Max} = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}\,(x_2)_{Max}$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_1+m_2}(V_1)_{Max} = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}\,\frac{\mu_s m_3 g}{k} \rightarrow \boxed{(V_1)_{Max} = \frac{\mu_s m_3 g}{m_1}\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}}$$

می‌توان به جای استفاده از رابطهٔ کار و انرژی برای جرم m_2، از روابط نیرو-جرم-شتاب هم استفاده کرد.

در شکل زیر دو شیار A و B به ترتیب بر روی مسیر افقی و عمودی در حرکت است. پین P مقید به دو شیار است. اگر شیار A با سرعت ثابت $1 \frac{m}{s}$ به سمت راست و شیار B از حال سکون با شتاب ثابت $0.5 \frac{m}{s^2}$ شروع به حرکت کند، مطلوبست تعیین سرعت و شتاب پین P در $t=1s$؟

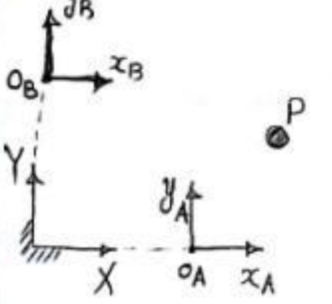


با توجه به شکل مقابل، معادلات دو شیار را می‌توان در دستگاه‌های متصل به این دو شیار بیان کرد. دستگاه متصل به شیار A را $x_A y_A$ و دستگاه متصل به شیار B، $x_B y_B$ نامگذاری می‌شود.

در دستگاه‌های متصل به این شیارها، داریم:

$$y_A = \frac{3}{2} x_A \quad , \quad y_B = -\frac{1}{2} x_B$$

یک دستگاه مرجع XY ثابت در نظر می‌گیریم، دستگاه‌های $x_A y_A$ و $x_B y_B$، دستگاه‌هایی هستند که با شیارهای A و B به ترتیب حرکت می‌کنند.



با استفاده از روابط زیر می‌توان دستگاه‌های مختصات را به یکدیگر مرتبط ساخت:

$$\begin{cases} X = O_A + x_A \\ Y = y_A \\ X = x_B \\ Y = O_B + y_B \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} y_A = \frac{3}{2} x_A \\ y_B = -\frac{1}{2} x_B \end{cases}$$

با جایگذاری در معادله‌ی فوق، خواهیم داشت :

$$\begin{cases} Y = O_B + y_B = O_B - \frac{1}{2} x_B = O_B - \frac{1}{2} X \\ X = O_A + x_A = O_A + \frac{2}{3} y_A = O_A + \frac{2}{3} Y \end{cases} \Rightarrow Y = O_B - \frac{1}{2}\left(O_A + \frac{2}{3} Y\right)$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} Y = O_B - \frac{1}{2} O_A$$

با مشتق‌گیری از رابطه‌ی فوق، روابط سرعت و شتاب بدست می‌آید :

$$\frac{4}{3}\dot{Y} = \cancel{\dot{O}_B} - \frac{\dot{O}_A}{2} \Rightarrow \dot{Y} = -3/8 \ m/s \Rightarrow \dot{X} = \frac{3}{4} \ m/s$$

$$\frac{4}{3}\ddot{Y} = \ddot{O}_B - \cancel{\frac{\ddot{O}_A}{2}} \Rightarrow \ddot{Y} = \frac{3}{8} \ m/s^2 \Rightarrow \ddot{X} = \frac{1}{4} \ m/s^2$$

$$\vec{V}_P = \dot{X}\vec{i} + \dot{Y}\vec{j} = \frac{3}{4}\vec{i} - 3/8\,\vec{j}$$

$$\vec{a}_P = \ddot{X}\vec{i} + \ddot{Y}\vec{j} = \frac{1}{4}\vec{i} + \frac{3}{8}\vec{j}$$